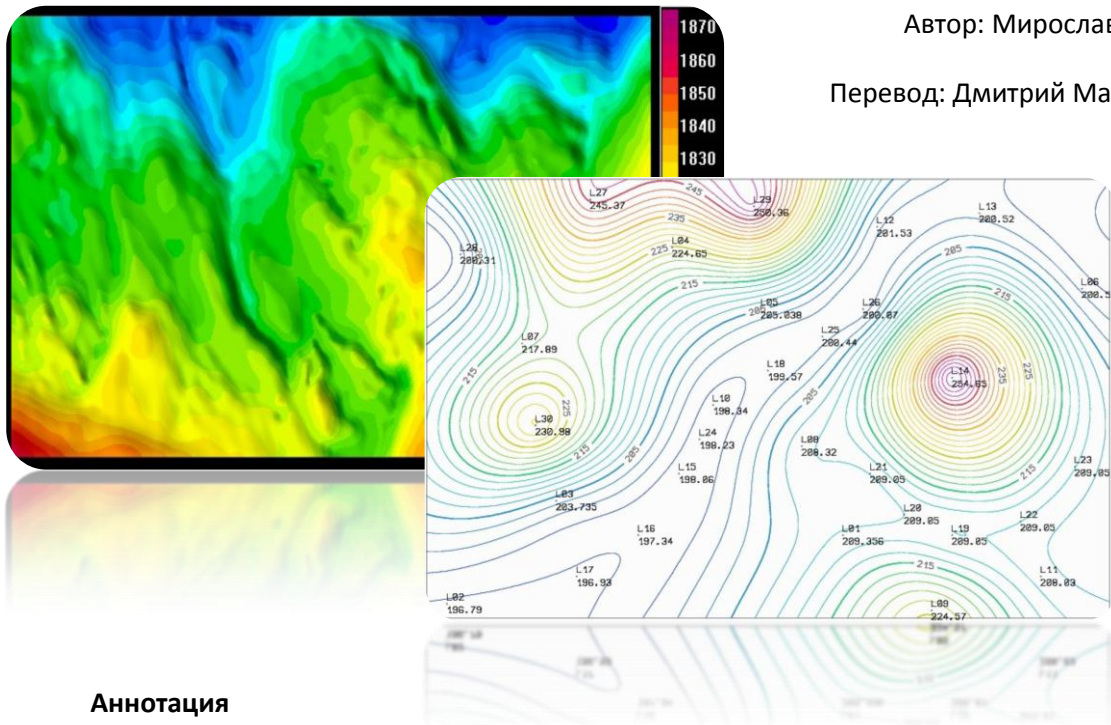


Интерполяция поверхностей

на основе численного натяжения и сглаживания

Автор: Мирослав Дресслер

Перевод: Дмитрий Масленников



Аннотация

В статье описывается новый метод интерполяции неравномерно распределенных точек в трехмерном пространстве непрерывной функции двух независимых переменных, которые могут быть использованы для создания поверхности карты во многих областях, таких как науки о земле, география, геология, метеорология и так далее. Этот метод был назван ABOS интерполяция, основанная на сглаживании, и использует очень простой математический инструмент - численные методы «натяжение» и сглаживание. Натяжение и сглаживание выполняются таким образом, чтобы элементы матрицы, (которая задает поверхность z значениями в узлах регулярной прямоугольной сетки), многократно заменялись взвешенным средним отобранных окружающих элементов. Выбор элементов, участвующих во взвешенном среднем зависит от типа натяжения или сглаживания.

Несмотря на то, что математика метода ABOS проста, при помощи нескольких параметров, можно получить поверхность сопоставимую с поверхностью созданной намного более сложными методами, такими как крайгинг, радиальная базисная функция или метод минимальной кривизны.

Введение

Существует несколько методов, обычно используемых для интерполяции неравномерно распределенных точек в трехмерном пространстве R^3 . Вероятно, наиболее принятые являются методы крайгинга и радиальной базисной функций, которые обеспечивают отличные результаты и подходят для использования в любой области. Тем не менее, могут быть проблемы с использованием этих методов - они должны решать систему линейных уравнений, количество

уравнений в которой равно количеству точек. Если количество входных точек велико, (скажем, более тысячи) то число уравнений также становится большим, и система уравнений не может быть решена в приемлемые сроки. В таком случае необходимо применить алгоритм поиска (уменьшающий число уравнений) и указать дополнительные параметры, влияющие на качество результирующей поверхности - радиус поиска, количество секторов поиска, максимальное количество точек в каждом секторе и так далее.

ABOS метод, описанный в этой статье не нуждается в решении системы уравнений и не использует алгоритмы поиска, даже если количество входных точек очень велико - скажем, миллионы.

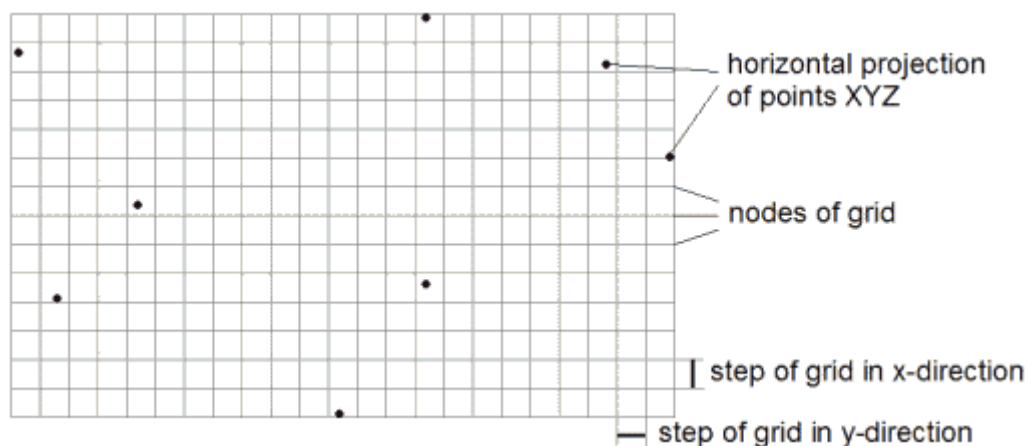
В противовес методам сложной интерполяции, метод ABOS не рассматривает математические выражения как линейную комбинацию базисных функций, статистическое соответствие лучшей линейности или требования о минимальной кривизны результирующей поверхности. Вместо этого он предоставляет инструменты для моделирования поверхности, основанные на численных методах «натяжения» и сглаживания для создания широкого спектра поверхностей.

Описание метода ABOS

Определение функции интерполяции и нотаций

Пусть $XYZ = \{(X_i, Y_i, Z_i) \in R^3; i = 1 \dots n\}$ представляет собой данный набор неравномерно распределенных точек в 3D пространстве и $XY = \{(X_i, Y_i) \in R^2; i = 1 \dots n\}$ является их горизонтальной проекции. В этой статье, интерполяция будет означать нахождение такой непрерывной функции $f(x, y)$ двух независимых переменных, для которых $f(X_i, Y_i) = Z_i$ или $|f(X_i, Y_i) - Z_i| < \delta$ соответственно.

Функция интерполяции, используемая методом ABOS определяется матрицей действительных чисел P , которая представляет собой поверхность заданную на узлах квадратной сетки точек XY . Область действия интерполяционной функции задается внешними линиями сетки.



Узнать значение поверхности в любой точке (x_0, y_0) можно используя билинейную интерполяцию ячейки сетки, заданную узлами a, b, c и d, содержащую точку (x_0, y_0) :

$$f(x,y) = ax + by + cx + d$$

В следующем тексте используются следующие обозначения:

x_1, x_2 минимум и максимум координаты x точки XYZ

y_1, y_2 минимум и максимум координаты y точки XYZ

z_1, z_2 минимум и максимум координаты z точки XYZ

i_1, j_1 размер сетки = количество столбцов и строк матрицы P

$P_{i,j}$ элементы матрицы P, $i = 1 \dots i_1$; $j = 1 \dots j_1$

DP вспомогательная матрица с таким же размером, как и матрица P

Z вектор z-координаты точки XYZ

DZ вспомогательный вектор такого же размера, как вектор Z

NB матрица ближайших точек - матрица целых, с таким же размером, как и матрица P, содержащая для каждого узла сетки порядковый индекс ближайшей точки XYZ

K матрица расстояний – матрица целых, с таким же размером, как и матрица P, содержащая для каждого узла сетки расстояние до ближайшей точки XYZ, измеряется в единицах сетки (в ячейках)

$K_{\max}$ максимальный элемент матрицы k

Filter Параметр ABOS метода, используемый для установки разрешения фильтра

RS Разрешение карты; $RS = \max(x_2 - x_1, y_2 - y_1) / \text{Filter}$

Dx шаг сетки по оси x; $Dx = (x_2 - x_1) / (i_1 - 1)$

Dy шаг сетки по оси y; $Dy = (y_2 - y_1) / (j_1 - 1)$

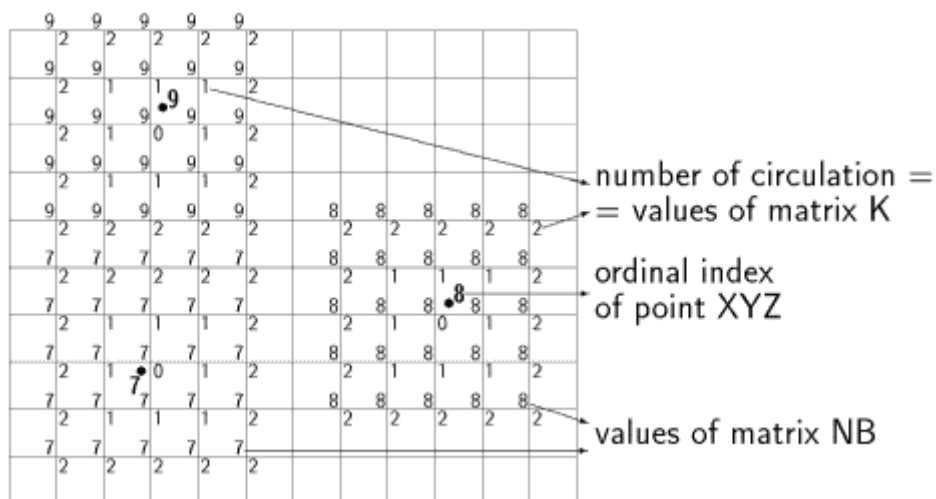
Dmc минимальное расстояние Чебышева между парами точек XYZ;

$Dmc = \min(\max(|X_i - X_j|, |Y_i - Y_j|); i \neq j \wedge i, j = 1 \dots n)$

$A \rightarrow B$ означает копирование матрицы (или вектора или числа) A в матрицу (или вектор или число) B

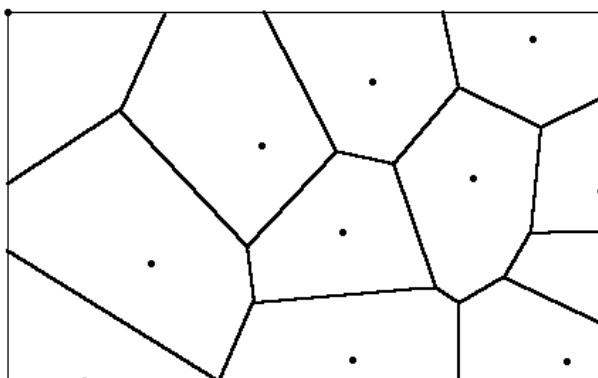
Матрица ближайших точек и матрицу расстояний

Прежде чем применить любой тип «натяжения» или сглаживания, необходимо вычислить матрицы NB и k с помощью алгоритма, основанного на распространении квадратных волн - «циркуляции» вокруг точки XYZ, как показано на следующем рисунке:



Все элементы матрицы NB и k первоначально заполняются нулями, и процесс «циркуляции» продолжается до тех пор, как есть нулевые значения в матрице NB. Расстояние сравнивается, только если элемент $K_{i,j}$, соответствующий вычисляемому узлу не является нулевым и $IC / \sqrt{2} \leq K_{i,j}$, где IC — номер текущей циркуляции. Таким образом, значительно уменьшается количество вычислений.

Вычисление матрицы NB определяет естественное разделение области влияния функции интерполяции на многоугольники (так называемые полигоны Вороного или Тиссена). Внутри каждого многоугольника значения матрицы NB равны индексу соответствующей точки XYZ.



Обработка границ и разломов

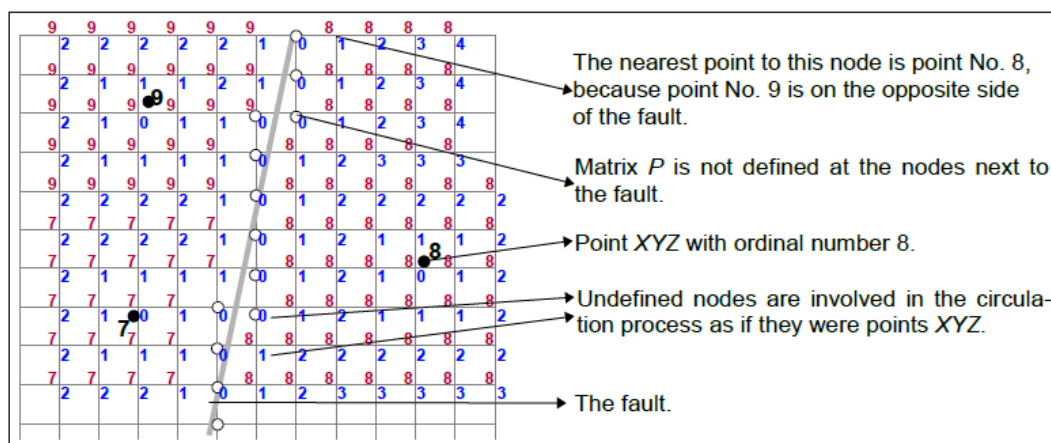
Граница обрабатывается как горизонтальная ломаная. Ее роль состоит в определении области интерполяции. Если нет никаких границ во входных данных, размер области интерполяции задается прямоугольной областью, ограниченной минимальными и максимальными координатами XYZ точек.

Разрывы представляет собой последовательность отрезков (в горизонтальной плоскости), на которых поверхность должна прерываться. Отрезок линии разрыва задается парой точек, с заданными x и y координатами на каждом конце.

Существование разломов влияет на вычисления матрицы NB , K и P в соответствии со следующими правилами:

- Элементы матрицы P , соответствующие узлам разрыва не определены.
- Неопределенные узлы участвуют в вычислении матрицы K , как виртуальные точки XYZ. (Примечание переводчика: строятся четырехсвязным алгоритмом Брезенхема)
- Порядковый номер ближайшей точки XYZ присваивается элементу матрицы NB , только если точка не находится на противоположной стороне разлома.

Виртуальные точки XYZ, как показано на следующем рисунке:



Выше представленные правила обеспечивают то, что точки, влияющие на «натяжение» не лежат на другой стороне разрыва.

В ходе процесса «натяжения» или сглаживания используются только определенные элементы матрицы P для вычисления взвешенного среднего.

Алгоритм интерполяции

Алгоритм метода ABOS может быть описана следующей схемой:

Шаг Описание

1. Определение размера сетки, расчет матриц NB и K, $Z \rightarrow DZ$
2. Кусочно-постоянная интерполяция значений DZ в матрицу P
3. «Натяжение» и сглаживание матрицы P
4. Определение различия $DZ - P \rightarrow DZ$
5. Если максимальная разница (максимальное значение элементов из вектора DZ) не превышает заданную точность, алгоритм завершен
6. $P \rightarrow DP$, кусочно-постоянная интерполяция DZ значений в матрицу P
7. «Натяжение» и сглаживание матрицы P
8. $P + DP \rightarrow P$
9. Повторение с шага 4.

От переводчика: Алгоритм ABOS заключается в следующем:

1. Строятся многоугольники влияния входных точек - доменов (похожих на многоугольники Вороного)
2. Заполняется матрица P – значениями точек (координатой Z)– формируются «столбики» из доменов
3. Домены сглаживаются различными способами
4. Рассчитываются отклонения величин dZ, как разница между Z после сглаживания и Z входных точек (значение Z в точке (X,Y) сглаженной поверхности определяется при помощи билинейной интерполяции из матрицы P)
5. Если сумма отклонений меньше порогового значения, то алгоритм завершается, иначе
 - a. Формируется новый набор точек с оригинальными значениями X,Y, у которых вместо значения Z берется dZ – т.е. разница между оригинальным значением Z и значением Z, полученным при сглаживании
 - b. Формируются «столбики» из доменов, только вместо Z используется dZ
 - c. Производится сглаживание различными способами
 - d. Полученный результат складывается с P и переходим к шагу 3

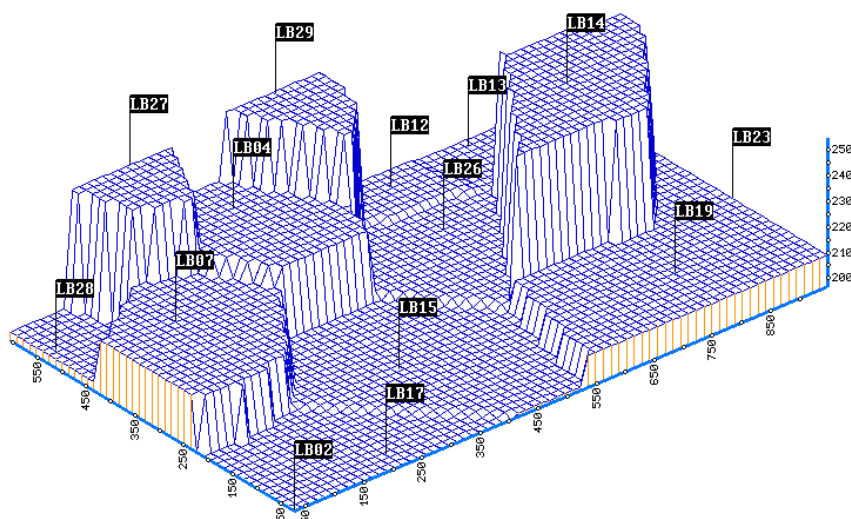
Далее более подробно описаны шаги алгоритма.

Шаг 1

На первом шаге, значение $i1$ (размер сетки по оси x) и $j1$ (размер сетки по оси y) должны быть заданы. Алгоритм вычисляет (в соответствии со значением $i1$) такое значение $j1$, чтобы разница между размерами сторон прямоугольника как можно меньше. На этом шаге вычисляются матрицы NB и k , а значения вектора z копируются в вектор DZ .

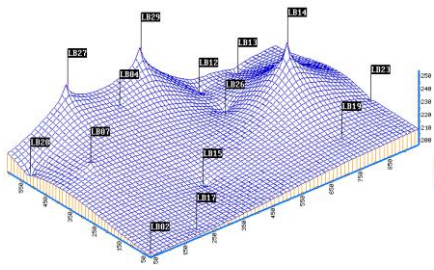
Шаг 2

Интерполяция DZ значений в матрице P осуществляется таким образом, чтобы значение $P_{i,j}$, для каждого узла сетки равнялось значению DZ в ближайшей точке XYZ (это означает, что $P_{i,j} = DZ_{NB(i,j)}$). Такая интерполяция константой (см. рисунок) происходит очень быстро.

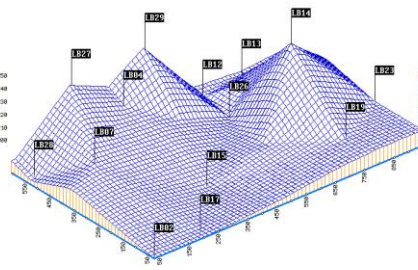


Шаг 3

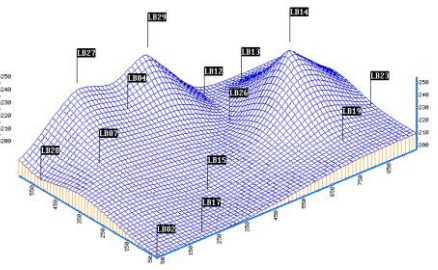
Неоднократные «натяжения», «линейные натяжения» и сглаживания (см. рисунки) матрицы P улучшают форму результирующей поверхности, но сглаживание уменьшает точность - поверхность не проходит точно через Z координаты точек XYZ .



«Натяжение»



«Линейное натяжение»



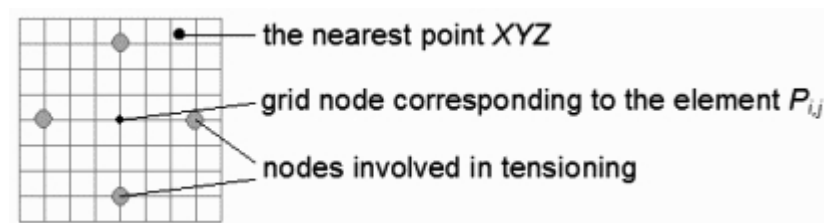
Сглаживание

«Натяжение»

«Натяжение» заменяет элементы матрицы P , средним значением:

$$P_{l,j} = (P_{i+k,j} + P_{i,j+k} + P_{i-k,j} + P_{i,j-k}) / 4, \quad k = K_{i,j}$$

только при $k > 0$. Следующая схема показывает узлы (отмечены серыми кругами) соответствующие элементам матрицы P , которые участвуют в «натяжении».



“Натяжение” неоднократно применяется в следующем цикле:

DO N = MAX(4, $K_{\max}/2+2$), 1, -1

...

ENDDO

Если k больше, чем убывающая переменная цикла N , то $k = N$.

«Линейное натяжение»

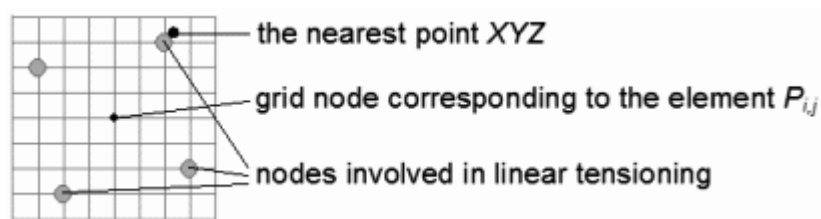
«Линейное натяжение» изменяет матрицу P по формуле:

$$P_{l,j} = (Q(P_{i+u,j+v} + P_{i-u,j-v}) + P_{i-v,j+u} + P_{i+v,j-u}) / (2Q+2), \text{ где}$$

(u, v) — вектор из узла, i, j в ближайший узел сетки точки $NB_{i,j}$, и $Q = L (K_{\max} - K_{i,j})^2$.

Постоянная $L = 1 / ((0.107 \cdot K_{\max} - 0.714) \cdot K_{\max})$ эмпирическая константа подавления влияния $K_{\max}$. Эта формула применима для степени «линейного натяжения» равной 1 (по умолчанию). Обобщенная формула для других степеней находится в разделе «Степени линейного натяжения».

Следующая схема показывает узлы (отмечены серыми кругами) соответствующих элементов матрицы P, которые участвуют в «линейном натяжении».



“Линейное натяжение” неоднократно применяется в следующем цикле:

```
DO N = MAX(4, Kmax/2+2), 1, -1
```

```
...
```

```
ENDDO
```

Если длина $|(u, v)|$ вектора (u, v) больше уменьшающейся переменной цикла N, то вектор (u, v) умножается на постоянную c так что $c \cdot |(u, v)| = N$.

Сглаживание заменяет элементы матрицы P , взвешенное среднее значение:

$$P_{i,j} = (\sum P_{k,l} + P_{i,j}(q \cdot t_{i,j} - 1)) / (8 + q \cdot t_{i,j}),$$

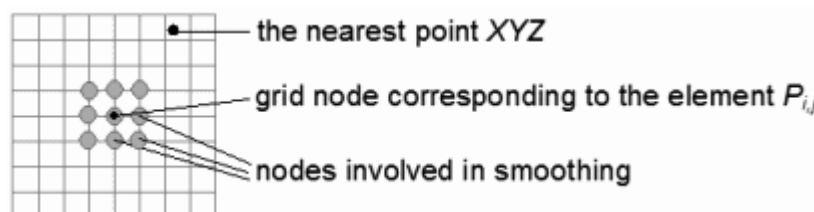
$$K = l - 1 \dots l + 1; l = j - 1 \dots j + 1$$

где q — это определяемые пользователем параметр контроля гладкость интерполяции (его значение по умолчанию — 0,5) а $t_{i,j}$ веса, которые равны нулю до первого сглаживания, а потом они вычисляются по формуле:

$$t_{i,j} = (\sum (P_{i,j} - P_{k,l}))^2,$$

$$k = l - 2 \dots l + 2; l = j - 2 \dots j + 2$$

и пересчитываются в интервал $[0,100]$. Вкратце можно сказать значения $t_{i,j}$ выше в узлах, где поверхность имеет локальные экстремумы, и ниже в узлах, где поверхность уменьшается или растет. Следующая схема показывает узлы (отмечены серыми кругами) соответствующих элементов матрицы P , которые участвуют в сглаживании.



“Сглаживание” неоднократно применяется в следующем цикле:

```
DO N = MAX(4, K_max · K_max / 16) 1, -1
```

```
...
```

```
ENDDO
```

Как вариант, ABOS метод позволяет выполнять так называемые LES сглаживание - в этом случае формулы для сглаживания не применяются, если переменная цикла N больше, чем $K_{i,j} + 1$. Это изменение в сглаживании подавляет колебания и превышает локальные экстремумы, если они происходят.

Шаг 4

Сглаженные и «натянутые» поверхности не проходят точно через Z-координаты точек XYZ, поэтому рассчитываются отклонения $DZ_i = Z_i - f(X_i, Y_i)$, $i = 1 \dots n$. Значение Z поверхности может быть вычислено в любой точке (x_0, y_0) при помощи билинейного уравнения:

$$f(x, y) = ax + by + cy + d,$$

где a, b, c и d - заданные угловые точки сетки, содержащие точку (x_0, y_0) .

В начале этого шага, алгоритм предоставляет возможность изменять элементы матрицы P преобразованием:

$$P_{i,j} = A \cdot P_{i,j} + B,$$

где константы A и B минимизируют функционал

$$\sum (A \cdot f(X_i, Y_i) + B - DZ_i)^2 \rightarrow \min$$

Таким образом, количество шагов итерации можно сократить на 20-50%.

Шаг 5

Если максимальная разница (максимальное значение элементов вектора DZ) меньше, чем указанная точность интерполяции, алгоритм останавливается. В противном случае алгоритм продолжается от шага 6.

Точность задается как процентное значение от разницы $Z_{\max} - Z_{\min}$.

Шаг 6

Матрица P копируется в DP (поэлементно), а вектор отличий DZ интерполяцией в матрицу P, также как в шаге 2.

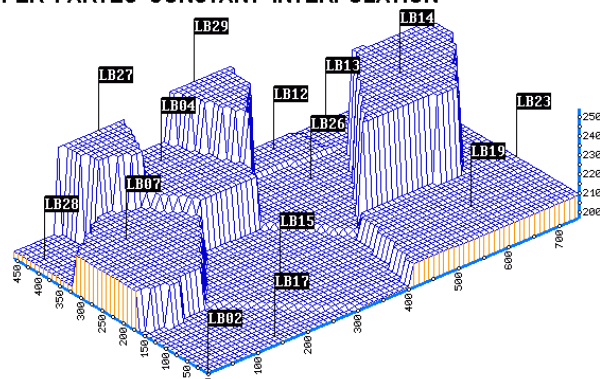
Шаг 7

Поверхность различий, представленная матрицей P, натянута и сглажена, также как в шаге 3.

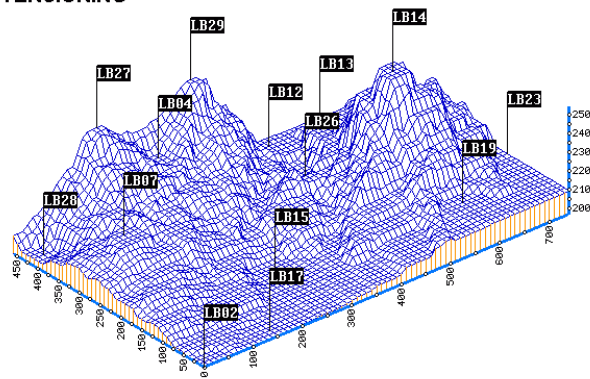
Шаг 8

Матрицы P и DP складываются поэлементно (суммой двух гладких поверхностей является гладкая поверхность) и результат сохраняется в матрице P. Алгоритм продолжается из шага 4.

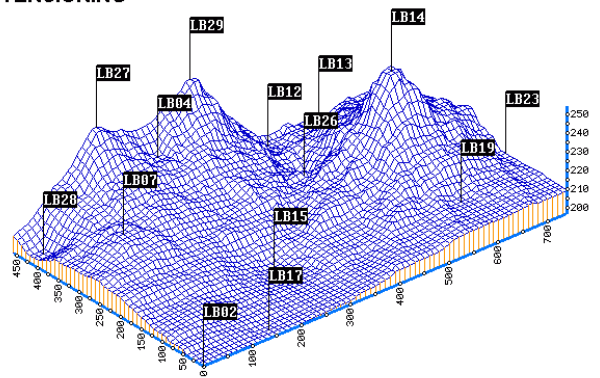
PER PARTES CONSTANT INTERPOLATION



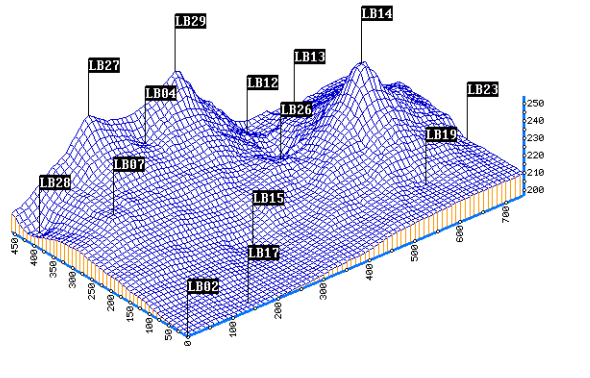
TENSIONING



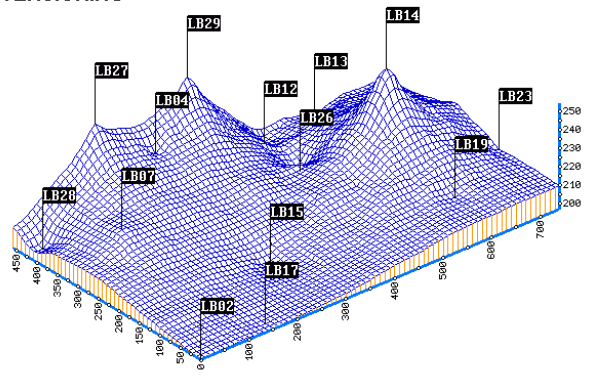
TENSIONING



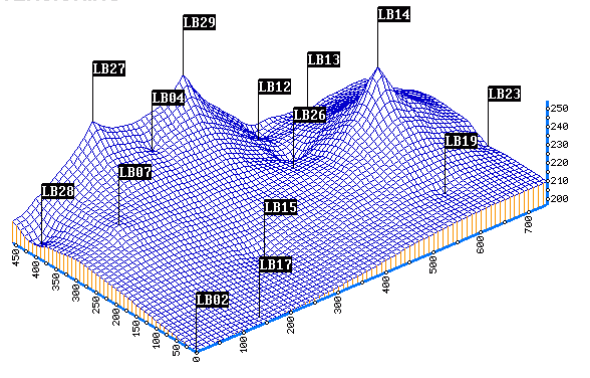
TENSIONING



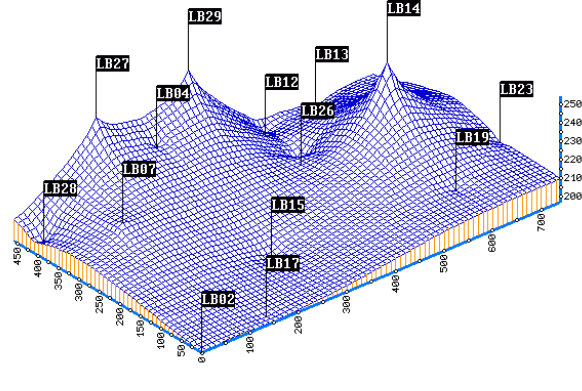
TENSIONING



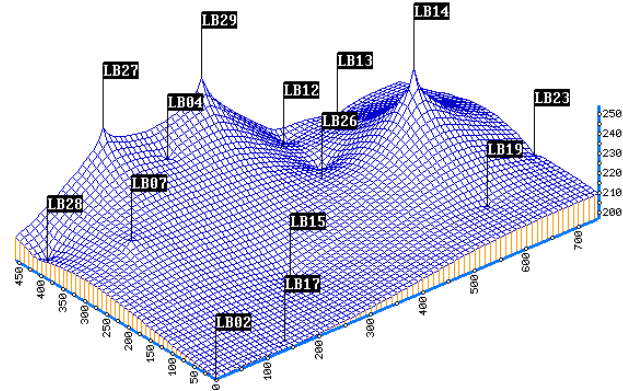
TENSIONING



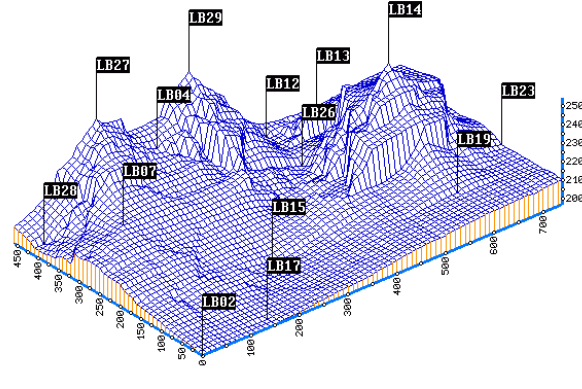
TENSIONING



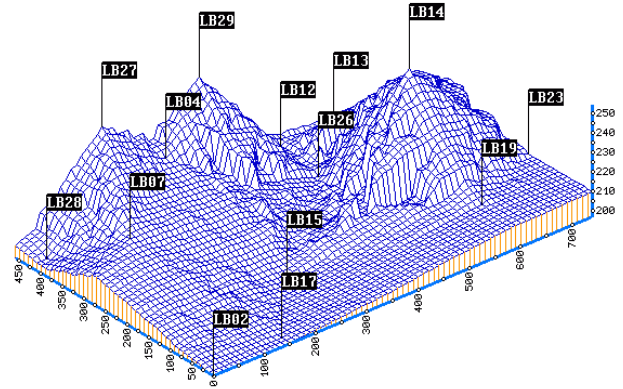
TENSIONING



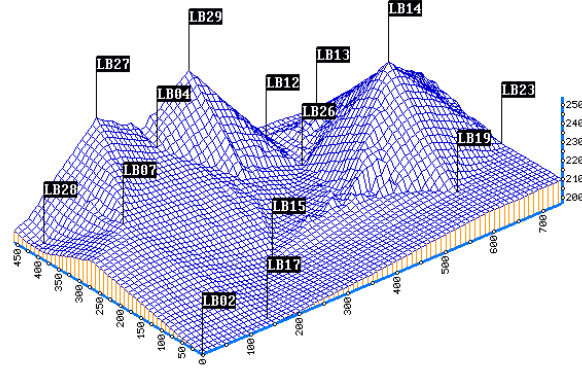
LINEAR TENSIONING



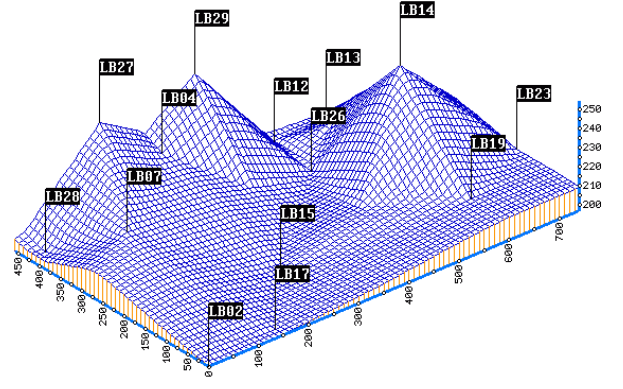
LINEAR TENSIONING



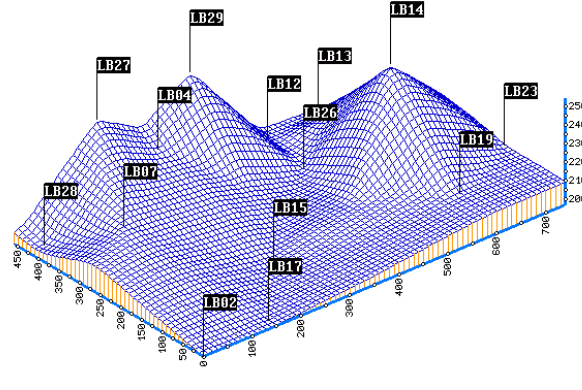
LINEAR TENSIONING



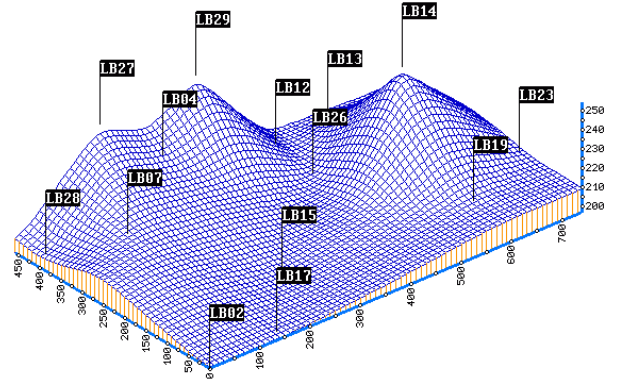
LINEAR TENSIONING



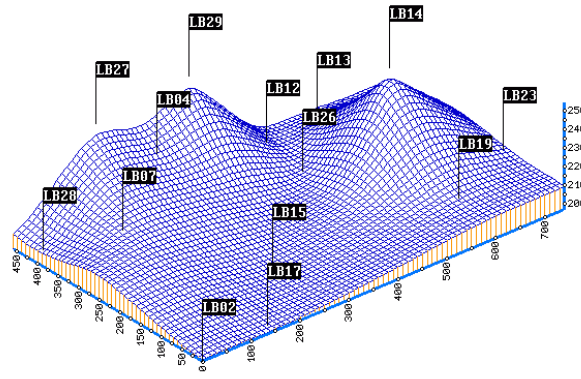
SMOOTHING



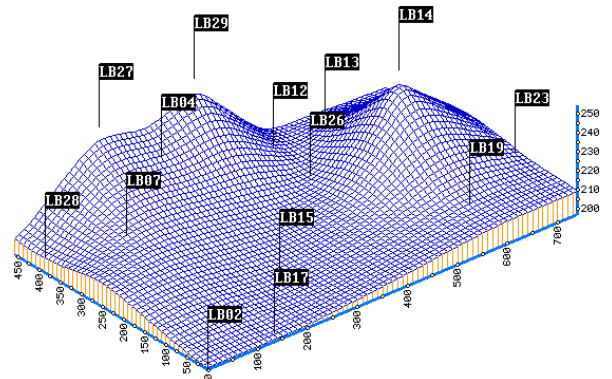
SMOOTHING



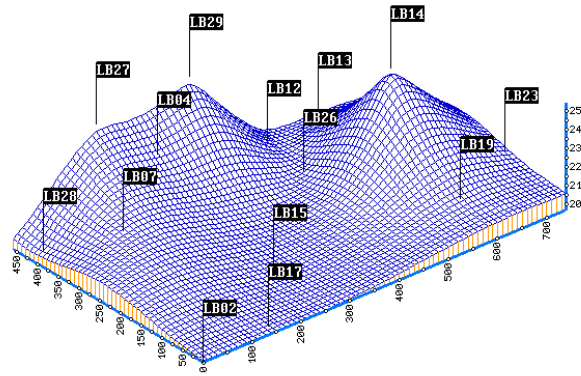
SMOOTHING



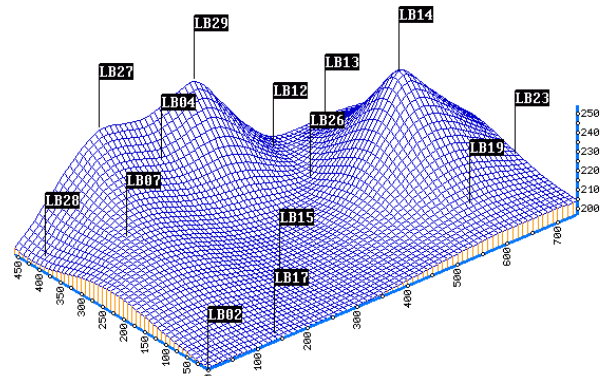
SMOOTHING



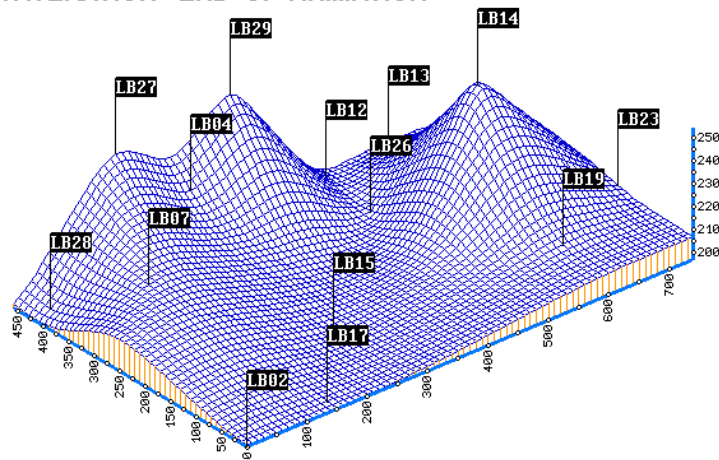
1. ITERATION



2. ITERATION



3. ITERATION - END OF ANIMATION



Заключение

Представленный метод – это простой, быстрый и гибкий алгоритм интерполяции, который применяется во многих областях и может обеспечить результаты, схожие с другими методами.

Среди упомянутых функций реализация метода позволяет:

- для создания и управления проектов, содержащих много карт
- для фильтрации входных данных
- для преобразования координат карты объектов (точки, разломов, полилинии, границы)
- использование мыши и клавиатуры для оцифровки объектов карт
- для моделирования разрывов в сгенерированной поверхности
- для удвоения сетки с помощью бикубической интерполяции между узлами сетки
- для вычисления и отображения изолиний
- для вычисления и отображения градиентных линий
- для отображения растровой заливки и 3D поверхности
- для заполнения сетки за пределами границ
- для выполнения математических вычислений с поверхностью
- для определения и отображения сечений через несколько поверхностей
- Использование специальных процедур для решения специальных задач, таких как
 - выклинивание пластов
 - сохранение экстраполяционных трендов в областях без данных
 - прямое преобразование времени отражения при сейсморазведке в структурные глубины границы пластов
 - Создание карт мощности пластов и подсчета запасов